Αν επιπλέον πάνω κ' κάτω από την πρώτη μονάδα είναι μηδενικά, ο πίνακας θα καλείται ανηγμένος κλιμακωτός.

Σκοπός μας είναι χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις να μετασχηματίσουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό. Αυτό θα γίνεται πολ/ζοντας με κατάλληλους πίνακες οι οποίοι θα ονομάζονται στοιχειώδεις πίνακες.

Στοιχειώδεις πίνακες:

1) $E_{i,j}$ ο πίνακας αυτός αλλάζει την i με την j γραμμή

$E_{1,2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad E_{1,2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$E_{i,j}=\begin{array}{r}\\ \\ i\text{ γραμμή}\\ j\text{-γραμμή}\end{array}\begin{pmatrix}1&&&&0\\&1&&&\\&&0&1&\\0&&1&0&1\end{pmatrix}$$

i-γραμμή j-στήλη

π.χ. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&\delta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}$ $\qquad b_{s,t}=\sum_{k=1}^{n} e_{s,k}a_{k,t}$

$s=j \longrightarrow b_{j,t}=\sum_{k=1}^{n} e_{j,k}a_{k,t}=e_{j,i}a_{i,t}=^{*}$

$E_{i,j}A=(e_{s,t})(a_{s,t})=(b_{s,t})$

Θέλουμε η j-γραμμή του B να είναι η i του A.

$$e_{s,t}=\begin{cases}e_{ii}=0\\ e_{i,j}=1\\ e_{jj}=0\\ e_{j,i}=1\\ e_{t,t}=1 & t\neq i,j\\ e_{t,s}=0 \text{ για } & t\neq i\ s\neq j\\ & t\neq j\ s\neq i\end{cases}$$

$=^{*} 1\cdot a_{i,t}=a_{i,t}$

Μόνο το $e_{j,i}=1$, τα άλλα είναι 0

$b_{s,t}=\sum_{k=1}^{n} e_{s,k}a_{k,t}=e_{s,s}a_{s,t}=1\cdot a_{s,t}=a_{s,t}$

$s,t\neq i,j$

ΛΗΜΜΑ Ο $E_{i,j}$ έχει αντίστροφο κ' ο αντίστροφός του είναι ο εαυτός $E_{i,j}E_{i,j}=I$

π.χ. Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 0 & 5\\ 4 & -9 & 1 & -2\\ 0 & -6 & 2 & 24\\ 1 & 3 & -2 & -5\\ 1 & 4 & -5 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -5\\ 4 & 9 & 1 & -2\\ 0 & -6 & 2 & 24\\ 5 & 9 & 0 & 5\\ 1 & 4 & -5 & -11\end{pmatrix}\begin{matrix}r_2\to r_2-4r_1\\ r_4\to r_4-5r_1\\ r_5\to r_5-r_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -5\\ 0 & -3 & 9 & 18\\ 0 & -6 & 2 & 24\\ 0 & -6 & 10 & 30\\ 0 & 1 & -3 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -5\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & -6 & 2 & 24\\ 0 & -6 & 10 & 30\\ 0 & -3 & 9 & 18\end{pmatrix}\begin{matrix}r_3\to r_3+6r_2\\ r_4\to r_4+6r_2\\ r_5\to r_5+3r_2\end{matrix}$$

ηγετικές μονάδες

$$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 3 & -2 & -5\\ 0 & \boxed{1} & -3 & -6\\ 0 & 0 & -16 & -12\\ 0 & 0 & -8 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1\to r_1-3r_2\\ r_3\to -\frac{1}{4}r_3\\ r_4\to -\frac{1}{2}r_4\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 13\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}r_4\to r_4-r_3\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 13\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 13\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 13-\frac{21}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -6+\frac{9}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1\to r_1-7r_3\\ r_2\to r_2+3r_3\end{matrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών στοιχείων χαρακτηρίζει τον πίνακα

Ορισμός: Δύο πίνακες θα καλούνται ισοδύναμοι, αν ο ένας προέρχεται από τον άλλον με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις κ' στοιχειώδεις πίνακες

1) Εναλλαγή δύο γραμμών. Αυτό επιτυγχάνεται με πολλ/μό με τον στοιχειώδη πίνακα.

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 1 \\ & & 0 & \\ 0 & 1 & & 1\ \ 0 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

$E_{i,j}A =$ ο πίνακας A όπου έχουμε εναλλάξει την i με την j $\quad E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}$

2) Πολλ/μός της i-γραμμής με α. Αυτό επιτυγχάνεται με πολλ/μό με τον πίνακα

$$M_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

3) Πρόσθεση στην i γραμμή πολλαπλάσιο της j-γραμμής. Αυτό επιτυγχάνεται με πολλ/μό με τον πίνακα

j-στήλη

$$A_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & 1\ \alpha & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad e_{t,s}$$

i

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{1,2}(\alpha) \quad A_{21}(\alpha)$

$A = (a_{t,s})$ συσχετίζεται $B(b_{t,s})$

$$b_{t,s} = \begin{cases} t \neq i & b_{t,j} = a_{t,s} \\ t = i & b_{i,s} = a_{i,s} + \alpha a_{j,s} \end{cases}$$

$B = A_{i,j}(\alpha)\, A$

$$e_{t,s} = \begin{cases} e_{t,t} = 1 \text{ (πάνω στην κύρια διαγώνιο)} \\ e_{t,s} = 0 \quad t \neq s \quad t \neq i \text{ κ' } j \neq s \\ e_{i,j} = \alpha \end{cases}$$

$A_{i,j}(\alpha)\, A = (b_{t,s})$

για $t \neq i$

$$b_{t,s} \to b_{t,t} = \sum_{k=1}^{n} e_{t,k}\, a_{k,t} = a_{t,t}$$

$k = t \quad e_{t,t} = 1$

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} a_{k,i} = \overset{1}{e_{i,i}} a_{i,i} + \overset{\alpha}{e_{i,j}} a_{j,i} = a_{i,i} + \alpha a_{j,i}$$

$$\underset{t \neq s}{b_{t,s}} = \sum_{k=1}^{n} e_{t,k} a_{k,s} = \overset{1}{e_{t,t}} a_{t,s} = a_{t,s}$$

Θεώρημα: Κάθε πίνακας A είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό. Δηλαδή υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ ώστε

$$B = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

κ' ο B είναι ανηγμένος κλιμακωτός του A

Απόδειξη: Ο ανηγμένος κλιμακωτός δημιουργείται από τον αρχικό με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις. Γνωρίζουμε όμως ότι οι στοιχειώδεις γραμμοπράξεις δίνονται από αντίστοιχα γινόμενα στοιχειωδών πινάκων. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ ώστε

$E_k \cdots E_1 A$ να είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός του A

π.χ. Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός του

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \to A_{2,1}(-2) \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \to A_{3,1}(-3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \frac{1}{2} r_2 \to M_2\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - r_2 \quad A_{1,2}(-1) \\ r_3 \to r_3 - 3r_2 \quad A_{3,2}(-3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (-2) r_3 \quad M_3(-2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - \frac{11}{2} r_3 \quad A_{1,3}\left(-\frac{11}{2}\right) \\ r_2 \to r_2 + \frac{7}{2} r_3 \quad A_{2,3}\left(\frac{7}{2}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Μοναδιαίος } A$$

$$I_{3\times 3} = A_{2,3}\left(\frac{7}{2}\right) A_{1,3}\left(-\frac{11}{2}\right) M_3(-2) A_{3,2}(-3) A_{1,2}(-1) M_2\left(\frac{1}{2}\right) A_{3,1}(-3) A_{2,1}(-2) E_{1,2} A$$

Επειδή οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι:

$$E_{i,j}^{-1} = E_{i,j} \qquad M_i(a)^{-1} = M_i\left(\frac{1}{a}\right)$$

$\boxed{A_{i,j}^{-1}(a) = A_{i,j}(-a)}$ Άσκηση

Αν με B ονομάσουμε το γινόμενο ⊕ θα έχουμε $I = BA$. Άρα ο B είναι ο αντίστροφος του A $B = A^{-1}$

Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι μοναδιαίος, τότε έχει αντίστροφο.
Μόνο οι τετραγωνικοί πίνακες έχουν αντίστροφους

Πόρισμα: Ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο μοναδιαίος. Ο αντίστροφός του, αν υπάρχει, δίνεται από το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχειωδών πινάκων που χρησιμοποιούμε για να βρούμε τον ανηγμένο κλιμακωτό.

Ερώτηση: Πώς θα τον υπολογίσουμε;

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ίσως αυτός είναι ο μοναδιαίος $\qquad A^{-1}$ $\qquad -34 + 2 + 33 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{33}{2} & 2 & \frac{22}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{21}{2} & -1 & -7 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boxed{-17 \quad 2 \quad 11} \\ 11 \quad -1 \quad -7 \\ 3 \quad 0 \quad -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}A = I$

π.χ. Να λύσετε το σύστημα

$$2x+4y-3z=1$$
$$x+y+2z=9$$
$$3x+6y-5z=0$$

Πίνακας των συντελεστών του συστήματος

$$A=\begin{pmatrix}2&4&-3\\1&1&2\\3&6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\9\\0\end{pmatrix}\Rightarrow I\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&2&11\\11&-1&-7\\3&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\9\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$x=1$
$y=2$
$z=3$